MA1 – domácí úkol 8 – řešení

(1) a) $\displaystyle\int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx = \int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{(x-1)^2+1}\,dx = \Big[\operatorname{arctg}(x-1)\Big]_2^{1+\sqrt{3}} =$

$$= \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) - \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}\ ;$$

integrál je Newtonův i Riemannův ((R) i (N)), neboť funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$ je spojitá v intervalu $\langle 2, 1+\sqrt{3}\rangle$;

A platí – je-li f spojitá v $\langle a,b\rangle$ $(a<b)$, pak existují

$$(R)\int_a^b f(x)dx \ \text{ i } \ (N)\int_a^b f(x)dx \ \text{ a } \ (N)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx .$$

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\Big[\ln|1+x| - \ln|1-x|\Big]_2^3 =$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_2^3 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 3) \left(= \frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}\right)$$

Funkce $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ je spojitá v intervalu $\langle 2,3\rangle$, tedy daný integrál je Newtonův i Riemannův (a tyto integrály se rovnají, tedy i Riemannův integrál „se počítá" užitím Newtonovy formule: $(R)\displaystyle\int_a^b f(x)dx = (N)\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$,

kde $F(x)$ je primitivní funkce k $f(x)$ v $\langle a,b\rangle$.

c) $$\int_1^e x\ln^2 x\,dx \underset{pp}{=} \left|\begin{matrix} u'=x, & u=\frac{x^2}{2} \\ v=\ln^2 x, & v'=2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}\end{matrix}\right| =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e x\ln x \underset{pp}{=} \left|\begin{matrix} u'=x, & u=\frac{x^2}{2} \\ v=\ln x, & v'=\frac{1}{x}\end{matrix}\right| =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln^2 x\right]_1^e - \left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx\right) =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\ln x\,(\ln x-1) + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \underline{\frac{1}{4}(e^2-1)}$$

Opět – integrál existuje, jako (N) i (R), neboť integrand, tj. $f(x)=x\ln^2 x$ je funkce spojitá v $\langle 1,e\rangle$, a $(N)\int_1^e x\ln^2 x\,dx = (R)\int_1^e x\ln^2 x\,dx$.

d) $$\int_0^1 \arcsin x\,dx \underset{pp}{=} \left|\begin{matrix} u'=1, & u=x \\ v=\arcsin x, & v'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{matrix}\right| = \left[x\arcsin x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \left[x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}-1\,;$$

Integrál existuje jako (R) i (N), ale při výpočtu $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^1$ je jen integrál Newtonův (z funkce neomezené v $\langle 0,1)$, $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$)

<u>nebo výpočet substitucí a pak integrací per partes:</u>

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx \underset{2VS}{=} \left|\begin{matrix} \arcsin x = t \\ x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt \\ x=0 \to t=0 \\ x=1\to t=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\cos t\,dt = \left|\begin{matrix} u'=\cos t, & u=\sin t \\ v=t, & v'=1\end{matrix}\right| =$$

$$= \left[t\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt = \frac{\pi}{2} - \left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}-1.$$

e) $$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx \underset{2VS}{=} \left| \begin{aligned} \sqrt{1+x} &= t \\ x &= t^2-1 \\ dx &= 2t\,dt \\ x=0 &\rightarrow t=1 \\ x=3 &\rightarrow t=2 \end{aligned} \right| = \int_1^2 \frac{t^2-1}{t}\cdot 2t\,dt =$$

$$= 2\int_1^2 (t^2-1)\,dt = 2\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^2 = 2\left(\frac{8}{3}-2-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right) = \frac{8}{3}$$

Integrál existuje jako (R) i (N), neboť funkce $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ je v intervalu $\langle 0,3\rangle$ spojitá.

f) $$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \underset{1VS}{=} \left| \begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,dx &= dt \\ x=0 &\rightarrow t=1 \\ x=1 &\rightarrow t=0 \end{aligned} \right| = -\int_1^0 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \left[\sqrt{t}\right]_0^1 = 1$$

Integrál existuje jen „jako integrál Newtonův, neboť funkce je sice spojitá v $\langle 0,1)$, ale není v intervalu $\langle 0,1)$ omezená – $\lim\limits_{x\to 1-} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = „\frac{1}{0+}" = +\infty$!

Pro výpočet integrálu lze užít substituci $\left| \begin{aligned} \sqrt{1-x^2} &= t \\ \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\,dx &= dt \\ x=0 &\rightarrow t=1 \\ x=1 &\rightarrow t=0 \end{aligned} \right|$,

tedy

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\,dx = -\int_1^0 dt = \int_0^1 dt = \left[t\right]_0^1 = 1$$

$2^{(*)}$. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx$ existuje jako (R) i (N), neboť integrand je funkce spojitá v $\langle 0,\pi\rangle$, ale „doporučená" substituce pro tento „druh" integrálu, tj: $\operatorname{tg} x = t$, není definována v bodě $x=\frac{\pi}{2}$, tedy užijeme aditivity integrálu, tj:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx \ ;$$

a navíc,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx \ :$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx \underset{\text{subst.}}{=} \left| \begin{array}{l} t = \pi - x \\ dx = -dt \\ x = \frac{\pi}{2} \to t = \frac{\pi}{2} \\ x = \pi \to t = 0 \end{array} \right| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1+3\cos^2(\pi - t)}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 t}\,dt,$$ neboť $\cos^2(\pi - t) = \cos^2 t$, tedy stačí tedy spočítat tento integrál posledně $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 t}\,dt$.

a výpočet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ x = 0 \to t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \to t \to \infty \end{array} \right| = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

(R) i (N)

to je „jen" integrál Newtonův (s „obecnější" definicí)

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{4+t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\infty} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

tedy $\underline{\int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \underline{\frac{\pi}{2}}$

<u>Poznámka</u>: mohlo vyjít u určitého integrálu substitucí, při které je pak $t \in \langle 0, +\infty)$ a užíváme zde obecnější definici Newtonova integrálu, tj.

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x),$$

pokud f má primitivní funkci v (a,b), a existují-li vlastní limity $\lim_{x\to b-} F(x)$, $\lim_{x\to a+} F(x)$, můžeme spočítat v $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ (stejnou substitucí v $\langle 0, \frac{\pi}{2})$ primitivní funkci), která je pak spojitá v $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, pokud ji dodefinujeme v bodě $x = \frac{\pi}{2}$ limitou:

$$F(x) = \int \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx \underset{2VS}{=} \left|\ \operatorname{tg} x = t\ \right| = \int \frac{1}{4+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right)(+C) \quad \text{pro } x \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2});\ \text{zvolíme } C = 0,$$

a pak $F(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$, tedy opět pak

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \left[F(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Aplikace:

1. $S(\omega)$, kde $\omega = \{[x,y];\ 0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq e^{\sqrt{x}}\}$

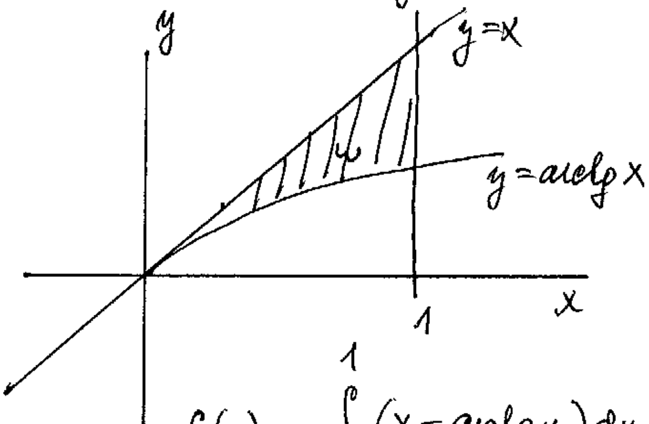
$$S(\omega) = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx \underset{2VS}{=} \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ x=0 \to t=0 \\ x=1 \to t=1 \end{array} \right| = 2\int_0^1 t e^t\,dt \underset{PP}{=}$$

$(e^{\sqrt{x}} > 0 \text{ v } \langle 0,1\rangle)$

$$= 2\left[t e^t - e^t\right]_0^1 = \underline{\underline{2}}$$

(integrál existuje, neboť $e^{\sqrt{x}}$ je spojitá funkce v $\langle 0,1\rangle$)

2. $S(\omega)$, kde ω je omezená oblast, ohraničená grafy funkcí $y = x$, $y = \operatorname{arctg} x$ a přímkou $x = 1$.



$y = x$ je tečna ke grafu funkce $y = \operatorname{arctg} x$ v $[0,0]$

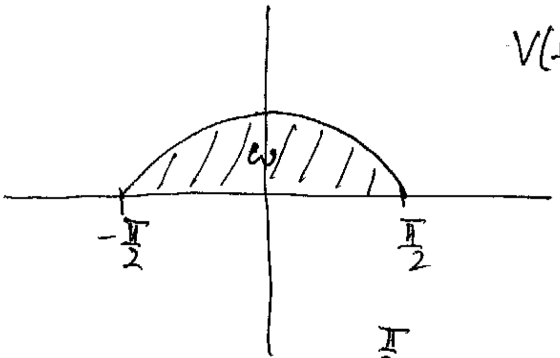
$$S(\omega) = \int_0^1 (x - \operatorname{arctg} x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}(1+\ln 2) - \frac{\pi}{4}}}\ ;$$

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx \underset{PP}{=} \left| \begin{array}{l} u' = 1,\ u = x \\ v = \operatorname{arctg} x,\ v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = \left[x \operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \underset{1VS}{=}$$

$$= \left[x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1$$

3. Objem tělesa (rotačního), které vznikne rotací rovinné oblasti ω kolem osy x, kde

$$\omega = \left\{ [x,y];\ -\tfrac{\pi}{2} \le x \le \tfrac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \cos x \right\}$$



$$V(\Omega) = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx ,$$

($\cos^2 x$ je funkce sudá), tedy

$$\underline{V(\Omega)} = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \pi \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{2}}}$$

a „navíc“:

(i) $f \in R(-a,a)$, $a>0$, f lichá $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$:

Dk: $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = 0 ,$$

(aditivita)

(na označení proměnné „nezáleží“)

neboť

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx \underset{\text{substituce}}{=} \left| \begin{array}{l} x=-t \\ dx=-dt \\ x=-a \to t=a \\ x=0 \to t=0 \end{array} \right| = -\int_a^0 f(-t)\,dt =$$

$$= \int_0^a f(-t)\,dt = -\int_0^a f(t)\,dt$$

ale $f(-t) = -f(t)$ (lichost f)

(ii) $f \in R\langle -a,a\rangle$, $a>0$, f sudá $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

Dk: (analogicky jako v (i)):

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx ,$$

neboť

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x=-t \\ dx=-dt \\ x=-a \to a=t \\ x=0 \to t=0 \end{array} \right| = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = -\int_{a}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt$$

ale $f(-t)=f(t)$